Volume 9, Nomor 2, Agustus-Desember 2025 CERMIN : JURNAL PENELITIAN
P-ISSN 2580 – 7781
E-ISSN 2615 – 3238

PEWARNAAN LOKAL SISI *ANTIMAGIC* PADA *CRAB GRAPH* (Cr_n), *SQUID GRAPH* (Sq_n) DAN *JELLYFISH GRAPH* (Jf_n)

LOCAL EDGE ANTIMAGIC COLORING ON CRAB GRAPH (Cr_n), *SQUID GRAPH* (Sq_n) *AND JELLYFISH GRAPH* (Jf_n)

Dinda Mulyasari[1)], Santoso[2)], Risan Nur Santi[3)], Desi Indriyani[4)]
[1,2,3,4]Prodi Matematika, Fakultas Pertanian, Sains dan Teknologi,
Universitas Abdurachman Saleh Situbondo
[1,2]Email: mulyasaridinda@gmail.com, santoso@unars.ac.id

ABSTRAK

Teori graf merupakan cabang matematika diskrit yang mempelajari objek berupa titik (*vertex*) dan sisi (*edge*) beserta hubungan di antara keduanya. Salah satu topik yang berkembang adalah pelabelan dan pewarnaan graf, termasuk pewarnaan lokal sisi *antimagic*, yaitu pewarnaan yang diperoleh dari pelabelan titik sehingga bobot sisi yang bertetangga berbeda dan jumlah warna yang digunakan minimum. Penelitian ini bertujuan menentukan kardinalitas dan bilangan kromatik pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Crab Graph* (Cr_n), *Squid Graph* (Sq_n), dan *Jellyfish Graph* (Jf_n) untuk $n \geq 3$. Metode yang digunakan adalah deduktif aksiomatik dengan pendekatan pendeteksian pola. Hasil penelitian menunjukkan bahwa untuk *Crab Graph* (Cr_n) memiliki kardinalitas yaitu $|V| = 2n + 4$ dan $|E| = 2n + 5$ dan bilangan kromatiknya yaitu $x_{lea}(Cr_n) = n + 4$. *Squid Graph* (Sq_n) kardinalitas yaitu $|V| = n + 3$ dan $|E| = n + 3$ dan bilangan kromatiknya yaitu $x_{lea}(Sq_n) = n + 2$. *Jellyfish Graph* (Jf_n) memiliki kardinalitas yaitu $|V| = 2n + 2$ dan $|E| = 3n$ dan bilangan kromatiknya yaitu yaitu $x_{lea}(Jf_n) = n + 3$.

Kata kunci: teori graf, pelabelan, pewarnaan lokal sisi *antimagic*

ABSTRACT

Graph theory is a branch of discrete mathematics concerned with the study of vertices and edges, as well as the relationships between them. Among the various topics in this field, labeling and coloring have received considerable attention, including local edge antimagic coloring—a coloring obtained by assigning labels to vertices such that adjacent edges have distinct weights, while minimizing the number of colors used. This study aims to determine the cardinality and chromatic number of local edge antimagic coloring for the Crab Graph (Cr_n), Squid Graph (Sq_n), and Jellyfish Graph (Jf_n) with $n \geq 3$. The research employs an axiomatic deductive method combined with pattern detection to identify general labeling structures. The results indicate that for the Crab Graph (Cr_n), the cardinalities are $|V| = 2n + 4$ and $|E| = 2n + 5$ with a chromatic number $x_{lea}(Cr_n) = n + 4$. For the Squid Graph (Sq_n) the cardinalities are $|V| = n + 3$

P-ISSN 2580 – 7781
E-ISSN 2615 – 3238

and $|E| = n + 3$ *with a chromatic number* $x_{lea}(Sq_n) = n + 2$. *For the Jellyfish Graph* (Jf_n) *the cardinalities are* $|V| = 2n + 2$ *and* $|E| = 3n$ *with a chromatic number* $x_{lea}(Jf_n) = n + 3$.

Keywords: *graph theory, labeling, local edge antimagic coloring*

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu yang berada di dalam matematika diskrit. Pada bidang ini, sering digunakan untuk membantu memecahkan suatu persoalan dengan merepresentasikan objek diskrit dan hubungan antar objek tersebut. Teori ini mempunyai keunikan karena kesederhanaan objek yang diteliti yaitu berupa titik (*vertex*) dan sisi (*edge*). Representasi suatu graf yaitu dengan menyatakan objek sebagai titik, sehingga hubungan antar objek tersebut dapat dinyatakan dengan sisi. Wilson (2015) menyatakan bahwa, suatu graf terdiri dari suatu himpunan tak kosong yang masing-masing unsurnya disebut titik (*vertex*) dan suatu himpunan pasangan tak berurutan dari titik-titik tersebut yang disebut sisi (*edge*). Menurut Ah (2011), Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $\big(V(G), E(G)\big)$ dengan $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik (*vertex*), dan $E(G)$ adalah himpunan (boleh kosong) dari pasangan tak terurut (u, v) dari titik u dan v yang berbeda di V yang disebut sisi (*edge*). Graf *G* didefinisikan sebagai pasangan himpunan adalah (*V*,*E*), ditulis dengan notasi $G = \big(V(G), E(G)\big)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak-kosong dari titik-titik dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang titik, Munir (2016).

Teori graf mengalami perkembangan yang sangat luas, salah satu topik yang menarik dan telah dikembangkan dalam teori ini yaitu pelabelan dan pewarnaan graf. Menurut Rezekina (2016), Pelabelan pada graf merupakan pemberian label pada elemen-elemen tertentu dari graf tersebut dengan menggunakan bilangan bulat positif. Secara umum, objek kajiannya berupa graf yang direpresentasikan oleh titik, sisi, dan himpunan bilangan asli yang disebut label. Nurhidayah dan Susanti (2022) juga mengatakan bahwa, secara umum pelabelan pada graf

P-ISSN 2580 – 7781
E-ISSN 2615 – 3238

$G = \left(V(G), E(G)\right)$ merupakan fungsi dengan kodomainnya merupakan himpunan bilangan (umumnya bilangan bulat positif) dan elemen-elemen dari G sebagai domainnya, yaitu himpunan simpul $V(G)$, himpunan sisi $E(G)$, atau kombinasinya dengan syarat tertentu. Selain itu, Parkhurst (2014) menyatakan bahwa Pelabelan (*labeling*) pada suatu graf adalah pemetaan atau dari setiap elemen graf ke bilangan bulat positif, yang mana bilangan tersebut disebut dengan label. Jika domain dari fungsi tersebut adalah himpunan titik (atau himpunan sisi), maka pelabelannya disebut pelabelan titik (atau pelabelan sisi). Jika domain dari fungsi tersebut adalah himpunan titik dan himpunan sisi, maka pelabelannya disebut pelabelan total. Menurut Rahman dkk (2019), Jumlah label sisi dan label dua titik yang menempel pada sisi disebut sebagai bobot sisi. Jika graf memiliki bobot titik atau bobot sisi yang sama, maka graf ini disebut graf dengan pelabelan ajaib. Jika graf memiliki bobot titik atau bobot sisi yang berbeda, maka graf ini disebut graf dengan pelabelan anti ajaib (*antimagic*). Awal mula penelitian tentang pelabelan *antimagic* ini diperkenalkan oleh Hartsfield dan Ringel pada tahun 1990.

Topik menarik dalam teori graf tidak hanya meliputi pelabelan graf, tetapi juga meliputi pewarnaan graf. Menurut Fatihah (2017), Pewarnaan graf merupakan kasus khusus dari pelabelan graf yang memiliki tiga mavam aspek yaitu pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*region coloring*). Pada pewarnaan graf, titik atau sisi yang bertetangga diberi warna yang berbeda. Selain itu, pemberian warna tersebut harus menggunakan *k* warna yang minimal, yang disebut bilangan kromatik. Salah satu penelitian tentang pewarnaan graf yang menarik yaitu tentang pewarnaan lokal *antimagic*. Pada tahun 2017, Arumugam dkk pertama kali memperkenalkan tentang pewarnaan lokal titik *antimagic*. Hasil penelitian tentang pewarnaan lokal titik antimagic yang dilakukan oleh Arumugam dkk (2017) yaitu pada graf lintasan, graf lingkaran, graf lengkap, graf persahabatan, graf roda, graf bipartit, dan graf komplit bipartit. Selain itu, Rohmatillah (2018) juga melakukan

P-ISSN 2580 – 7781
E-ISSN 2615 – 3238

penelitian tentang pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada graf pohon dan graf hasil operasi *shackle*.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik. Metode deduktif adalah metode yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah yang akan diteliti. Pada penelitian ini akan didapatkan teorema-teorema ataupun definisi-definisi baru yang diperoleh dari hasil analisis lebih lanjut terhadap teorema-teorema ataupun definisi-definisi sebelumnya yang telah ada. Penelitian ini pada prosesnya juga menggunakan metode pendeteksian pola yaitu dengan merumuskan bagaimana pola pewarnaan lokal sisi *antimagic* sehingga diperoleh pola umum.

Penelitian ini dilakukan pada *Crab Graph* (Cr_n), *Squid Graph* (Sq_n) dan *Jellyfish Graph* (Jf_n). Adapun alur penelitiannya adalah sebagai berikut:

a. Menentukan graf sebagai objek penelitian. Pada metode ini menentukan *Crab Graph* (Cr_n), *Squid Graph* (Sq_n) dan *Jellyfish Graph* (Jf_n) sebagai objek penelitian.
b. Menotasikan titik dan sisi.
c. Menetukan kardinalitas sisi dan kardinalitas titik pada graf.
d. Menetukan pelabelan titik pada graf.
e. Menghitung bobot sisi pada graf.
f. Memeriksa apakah bobot sisi yang bertetangga memiliki bobot yang berbeda.
g. Mengitung banyaknya bobot yang berbeda.
h. Menentukan batas bawah.
i. Memeriksa apakah batas bawah dan batas atas memiliki nilai yang sama.
j. Memperoleh bilangan kromatik.

P-ISSN 2580 – 7781
E-ISSN 2615 – 3238

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Berikut 3 graf yang menjadi objek penelitian, yaitu:

1. *Crab Graph* ($\mathrm{Cr_n}$)

Crab Graph ($\mathrm{Cr_n}$) atau graf kepiting adalah graf terhubung yang dinotasikan dengan $\mathrm{Cr_n}$ dengan himpunan titik $V(\mathrm{Cr}_n) = \{a_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x\} \cup \{y_1, y_2\} \cup \{z\} \cup \{b_i\,; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(\mathrm{Cr}_n) = \{xa_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{xy_i\,; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{zy_i\,; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{zb_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_1y_2\}$ sehingga $|V| = 2n + 4$ dan $|E| = 2n + 5$.

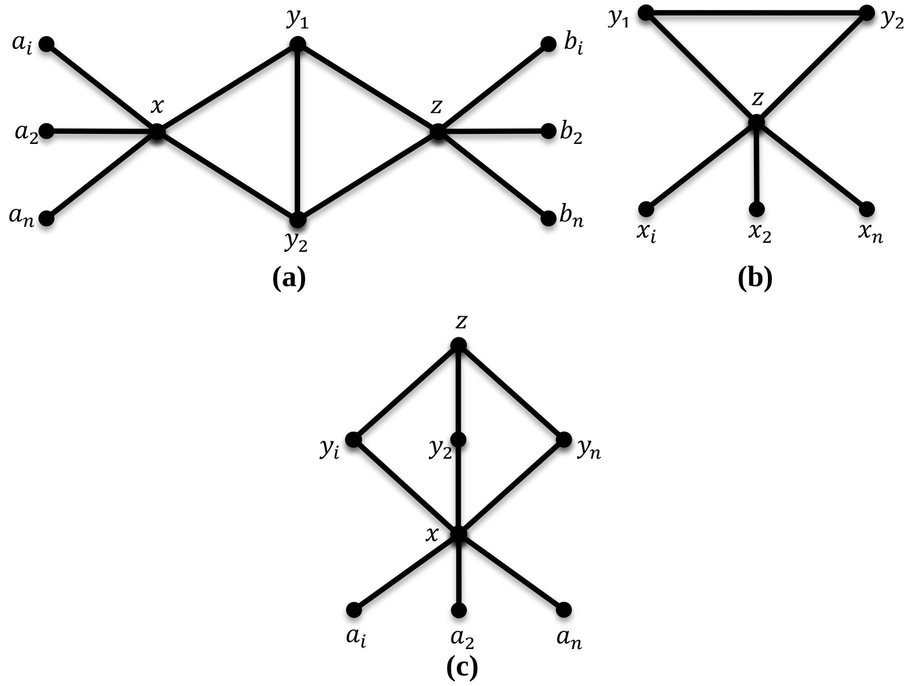
2. *Squid Graph* ($\mathrm{Sq_n}$)

Squid Graph ($\mathrm{Sq_n}$) atau graf cumi-cumi adalah graf terhubung yang dinotasikan dengan $\mathrm{Sq_n}$ dengan himpunan titik $V(\mathrm{Sq}_n) = \{x_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_1, y_2\} \cup \{z\}$ dan himpunan sisi $E(\mathrm{Sq}_n) = \{zx_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{zy_1, zy_2\} \cup \{y_1y_2\}$ sehingga $|V| = n + 3$ dan $|E| = n + 3$.

3. *Jellyfish Graph* ($\mathrm{Jf_n}$)

Jellyfish Graph ($\mathrm{Jf_n}$) atau graf ubur-ubur adalah graf terhubung yang dinotasikan dengan $\mathrm{Jf_n}$ dengan himpunan titik $V(\mathrm{Jf}_n) = \{a_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x\} \cup \{y_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z\}$ dan himpunan sisi $E(\mathrm{Jf}_n) = \{xa_i, xy_i, zy_i\,; 1 \leq i \leq n\}$ sehingga $|V| = 2n + 2$ dan $|E| = 3n$.

P-ISSN 2580 – 7781
E-ISSN 2615 – 3238



Gambar 1. (a) *Crab Graph* ($\mathrm{Cr_n}$), (b). *Squid Graph* ($\mathrm{Sq_n}$), (c). *Jellyfish Graph* ($\mathrm{Jf_n}$)

Berdasarkan 3 graf diatas maka pewarnaan lokal sisi antimagic pada ketiga graf tersebut, yaitu:

1. **Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* Pada *Crab Graph* ($\mathrm{Cr_n}$)**

Crab Graph ($\mathrm{Cr_n}$) atau graf kepiting adalah graf terhubung yang dinotasikan dengan $\mathrm{Cr_n}$ dengan himpunan titik $V(\mathrm{Cr}_n) = \{a_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x\} \cup \{y_1, y_2\} \cup \{z\} \cup \{b_i\,; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(\mathrm{Cr}_n) = \{xa_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{xy_i\,; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{zy_i\,; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{zb_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_1y_2\}$ sehingga $|V| = 2n + 4$ dan $|E| = 2n + 5$.

Teorema 1. *Crab Graph* ($\mathrm{Cr_n}$) dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$, maka bilangan kromatik untuk pewarnaan lokal sisinya yaitu $x_{lea}(Cr_n) = n + 3$.

Bukti. *Crab Graph* ($\mathrm{Cr_n}$) dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$. Menurut definisi, himpunan titik pada graf ini dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$V(\mathrm{Cr}_n) = \{a_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x\} \cup \{y_1, y_2\} \cup \{z\} \cup \{b_i\,; 1 \leq i \leq n\}$$

P-ISSN 2580 – 7781
E-ISSN 2615 – 3238

Berdasarkan penotasian himpunan titik pada graf ini, maka pasangan himpunan titik yang terhubung disebut himpunan sisi. Himpunan sisi pada *Crab Graph* ($\mathrm{Cr_n}$) dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$E(\mathrm{Cr}_n) = \{xa_i\,; 1 \le i \le n\} \cup \{xy_i\,; 1 \le i \le 2\} \cup \{zy_i\,; 1 \le i \le 2\} \cup \{zb_i\,; 1 \le i \le n\} \cup \{y_1y_2\}$$

Graf kepiting ini memiliki kardinalitas titik $|V| = 2n + 4$ dan kardinalitas sisi $|E| = 2n + 5$. Selanjutnya, ditentukan label pada himpunan titik dan bobot sisi pada graf tersebut. Pertama, dilabeli semua himpunan titik pada *Crab Graph* ($\mathrm{Cr_n}$). Himpunan titik a_i dilabeli dengan label $\{5, \cdots, 2n + 3\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan titik a_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $f(a_i) = 2i + 3$. Himpunan titik x dilabeli dengan label $\{1\}$. Sehingga diperoleh $f(x) = 1$. Himpunan titik y_1, y_2 dilabeli dengan label $\{3,4\}$. Sehingga diperoleh $f(y_i) = i + 2$. Himpunan titik z dilabeli dengan label $\{2\}$. Sehingga diperoleh $f(z) = 2$. Himpunan titik b_i dilabeli dengan label $\{6, \cdots, 2n + 4\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan titik b_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $f(b_i) = 2i + 4$. Setelah semua fungsi pelabelan titik didapatkan, maka dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(v) = \begin{cases} 2i + 3 & v = a_i \\ 1 & v = x \\ i + 2 & v = y_i \\ 2 & v = z \\ 2i + 4 & v = b_i \end{cases}$$

Kedua, dibobotkan semua himpunan sisi pada *Crab Graph* ($\mathrm{Cr_n}$). Himpunan sisi xa_i dibobotkan dengan label $\{6, \cdots, 2n + 4\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan sisi xa_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $w(xa_i) = 2i + 4$. Himpunan sisi xy_i dibobotkan dengan label $\{4, 2n + 2\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan sisi xy_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $w(xy_i) = 2i + 2$. Himpunan sisi y_1y_2 dibobotkan dengan label $\{7\}$. Sehingga diperoleh $w(y_1y_2) = 7$. Himpunan sisi zy_i dibobotkan dengan label $\{5, n + 4\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan sisi zy_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $w(zy_i) = i + 4$. Himpunan sisi zb_i dibobotkan dengan label $\{8, \cdots, 2n + 6\}$. Mengingat bahwa

P-ISSN 2580 – 7781
E-ISSN 2615 – 3238

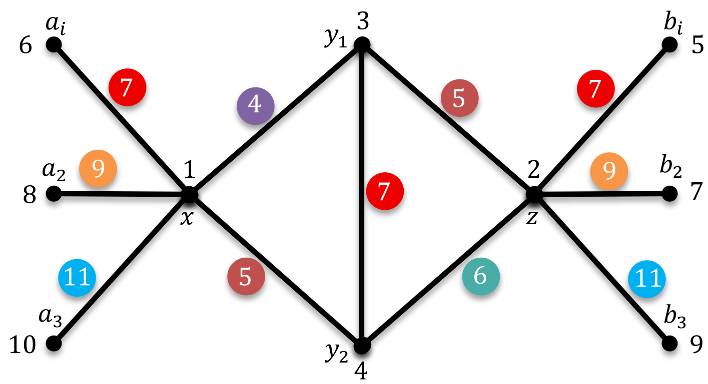
terdapat indeks i pada himpunan sisi zb_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $w(zb_i) = 2i + 6$.

Setelah semua bobot pelabelan sisi didapatkan, maka dapat dituliskan sebagai berikut:

$$w(e) = \begin{cases} 2i+4 & e = xa_i \\ 2i+2 & e = xy_i \\ 7 & e = y_1y_2 \\ i+4 & e = zy_i \\ 2i+6 & e = zb_i \end{cases}$$

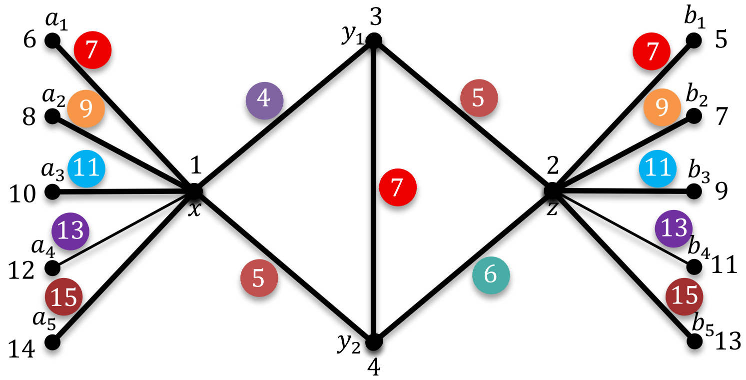
Untuk $n = 3$ *Crab Graph* ($\mathrm{Cr_n}$) memiliki jumlah warna minimal yaitu 6. Selanjutnya untuk $n = 4$, maka jumlah warna minimalnya yaitu 7. Selain itu, untuk $n = 5$, maka jumlah warna minimalnya yaitu 8. Dengan demikian, banyaknya warna minimal yang diaplikasikan pada *Crab Graph* ($\mathrm{Cr_n}$) adalah sebanyak $n + 3$. Jadi terbukti bahwa $x_{lea}(Cr_n) = n + 3$.

Dapat disimpulkan bahwa *Crab Graph* ($\mathrm{Cr_n}$) dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$, maka bilangan kromatik untuk pewarnaan lokal sisinya yaitu $x_{lea}(Cr_n) = n + 3$. Ilustrasi mengenai hasil pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Crab Graph* ($\mathrm{Cr_n}$) sebagai berikut:

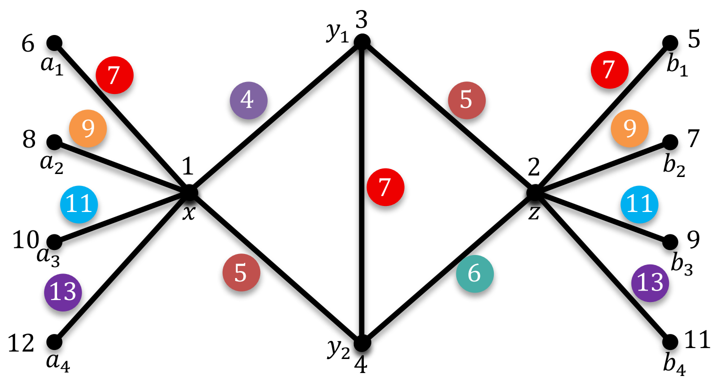


Gambar 2. Pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Crab Graph* ($\mathrm{Cr_3}$)

P-ISSN 2580 – 7781
E-ISSN 2615 – 3238



Gambar 3. Pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Crab Graph* (Cr_4)



Gambar 4. Pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Crab Graph* (Cr_5)

2. **Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* Pada *Squid Graph* (Sq_n)**

Squid Graph (Sq_n) atau graf cumi-cumi adalah graf terhubung yang dinotasikan dengan Sq_n dengan himpunan titik $V(\mathrm{Sq}_n) = \{x_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_1, y_2\} \cup \{z\}$ dan himpunan sisi $E(\mathrm{Sq}_n) = \{zx_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{zy_1, zy_2\} \cup \{y_1y_2\}$ sehingga $|V| = n + 3$ dan $|E| = n + 3$.

Teorema 2. *Squid Graph* (Sq_n) dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$, maka bilangan kromatik untuk pewarnaan lokal sisinya yaitu $x_{lea}(Sq_n) = n + 2$.

Bukti. *Squid Graph* (Sq_n) dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$. Menurut definisi, himpunan titik pada graf ini dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$V(\mathrm{Sq}_n) = \{x_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_1, y_2\} \cup \{z\}$$

P-ISSN 2580 – 7781
E-ISSN 2615 – 3238

Berdasarkan penotasian himpunan titik pada graf ini, maka pasangan himpunan titik yang terhubung disebut himpunan sisi. Himpunan sisi pada *Squid Graph* (Sq_n) dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$E(\mathrm{Sq}_n) = \{zx_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{zy_1, zy_2\} \cup \{y_1y_2\}$$

Graf cumi-cumi ini memiliki kardinalitas titik $|V| = n + 3$ dan kardinalitas sisi $|E| = n + 3$. Selanjutnya, ditentukan label pada himpunan titik dan bobot sisi pada graf tersebut. Pertama, dilabeli semua himpunan titik pada *Squid Graph* (Sq_n). Himpunan titik x_i dilabeli dengan label $\{4,5, \cdots, n + 3\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan titik x_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $f(x_i) = i + 3$. Himpunan titik z dilabeli dengan label $\{1\}$. Sehingga diperoleh $f(z) = 1$. Himpunan titik y_1, y_2 dilabeli dengan label $\{2,3\}$. Sehingga diperoleh $f(y_i) = i + 1$. Setelah semua fungsi pelabelan titik didapatkan, maka dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(v) = \begin{cases} i + 3, & v = x_i \\ i + 1, & v = y_i \\ 1, & v = z \end{cases}$$

Kedua, dibobotkan semua himpunan sisi pada *Squid Graph* (Sq_n). Himpunan sisi zx_i dibobotkan dengan label $\{5, \cdots, n + 4\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan sisi zx_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $w(zx_i) = i + 4$. Himpunan sisi zy_i dibobotkan dengan label $\{3, n + 2\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan sisi zy_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $w(zy_i) = i + 2$. Himpunan sisi y_1y_2 dibobotkan dengan label $\{5\}$. Sehingga diperoleh $w(y_1y_2) = 5$.

Setelah semua bobot pelabelan sisi didapatkan, maka dapat dituliskan sebagai berikut:

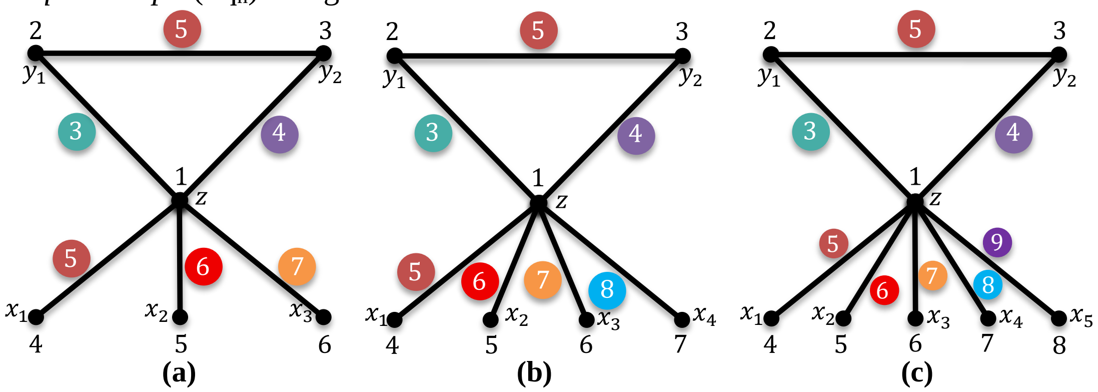
$$w(e) = \begin{cases} i + 4, & e = zx_i \\ i + 2, & e = zy_i \\ 5, & e = y_1y_2 \end{cases}$$

Untuk $n = 3$ *Squid Graph* (Sq_n) memiliki jumlah warna minimal yaitu 5. Selanjutnya untuk $n = 4$, maka jumlah warna minimalnya yaitu 6. Selain itu, untuk $n = 5$, maka jumlah warna minimalnya yaitu 7. Dengan demikian,

P-ISSN 2580 – 7781
E-ISSN 2615 – 3238

banyaknya warna minimal yang diaplikasikan pada *Squid Graph* ($\mathrm{Sq_n}$) adalah sebanyak $n + 2$. Jadi terbukti bahwa $x_{lea}(Sq_n) = n + 2$.

Dapat disimpulkan bahwa *Squid Graph* ($\mathrm{Sq_n}$) dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$, maka bilangan kromatik untuk pewarnaan lokal sisinya yaitu $x_{lea}(Sq_n) = n + 2$. Ilustrasi mengenai hasil pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Squid Graph* ($\mathrm{Sq_n}$) sebagai berikut:



Gambar 5. (a) Pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Squid Graph* ($\mathrm{Sq_3}$),
(b) Pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Squid Graph* ($\mathrm{Sq_4}$),
(c) Pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Squid Graph* ($\mathrm{Sq_5}$)

3. Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* Pada *Jellyfish Graph* ($\mathrm{Jf_n}$)

Jellyfish Graph ($\mathrm{Jf_n}$) atau graf ubur-ubur adalah graf terhubung yang dinotasikan dengan $\mathrm{Jf_n}$ dengan himpunan titik $V(\mathrm{Jf}_n) = \{z\} \cup \{y_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x\} \cup \{a_i\,; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(\mathrm{Jf}_n) = \{zy_i, xy_i, xa_i\,; 1 \leq i \leq n\}$ sehingga $|V| = 2n + 2$ dan $|E| = 3n$.

Teorema 3. *Jellyfish Graph* ($\mathrm{Jf_n}$) dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$, maka bilangan kromatik untuk pewarnaan lokal sisinya yaitu $x_{lea}(\mathrm{Jf}_n) = n + 3$.

Bukti. *Jellyfish Graph* ($\mathrm{Jf_n}$) dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$. Menurut definisi, himpunan titik pada graf ini dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$V(\mathrm{Jf}_n) = \{z\} \cup \{y_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x\} \cup \{a_i\,; 1 \leq i \leq n\}$$

Berdasarkan penotasian himpunan titik pada graf ini, maka pasangan himpunan titik yang terhubung disebut himpunan sisi. Himpunan sisi pada *Jellyfish Graph* ($\mathrm{Jf_n}$) dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$E(\mathrm{Jf}_n) = \{zy_i, xy_i, xa_i\,; 1 \leq i \leq n\}$$

P-ISSN 2580 – 7781
E-ISSN 2615 – 3238

Graf ubur-ubur ini memiliki kardinalitas titik $|V| = 2n + 2$ dan kardinalitas sisi $|E| = 3n$. Selanjutnya, ditentukan label pada himpunan titik dan bobot sisi pada graf tersebut. Pertama, dilabeli semua himpunan titik pada *Jellyfish Graph* (Jf_n). Himpunan titik z dilabeli dengan label $\{2\}$. Sehingga diperoleh $f(z) = 2$. Himpunan titik y_i dilabeli dengan label $\{3, \cdots, 2n + 1\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan titik y_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $f(y_i) = 2i + 1$. Himpunan titik x dilabeli dengan label $\{1\}$. Sehingga diperoleh $f(x) = 1$. Himpunan titik a_i dilabeli dengan label $\{4, \cdots, 2n + 2\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan titik a_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $f(a_i) = 2i + 2$. Setelah semua fungsi pelabelan titik didapatkan, maka dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(v) = \begin{cases} 2, & v = z \\ 2i + 1, & v = y_i \\ 1, & v = x \\ 2i + 2, & v = a_i \end{cases}$$

Kedua, dibobotkan semua himpunan sisi pada *Jellyfish Graph* (Jf_n). Himpunan sisi zy_i dibobotkan dengan label $\{5, \cdots, 2n + 3\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan sisi zy_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $w(zy_i) = 2i + 3$. Himpunan sisi xy_i dibobotkan dengan label $\{4, \cdots, 2n + 2\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan sisi xy_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $w(xy_i) = 2i + 2$. Himpunan sisi xa_i dibobotkan dengan label $\{5, \cdots, 2n + 3\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan sisi xa_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $w(xa_i) = 2i + 3$.

Setelah semua bobot pelabelan sisi didapatkan, maka dapat dituliskan sebagai berikut:

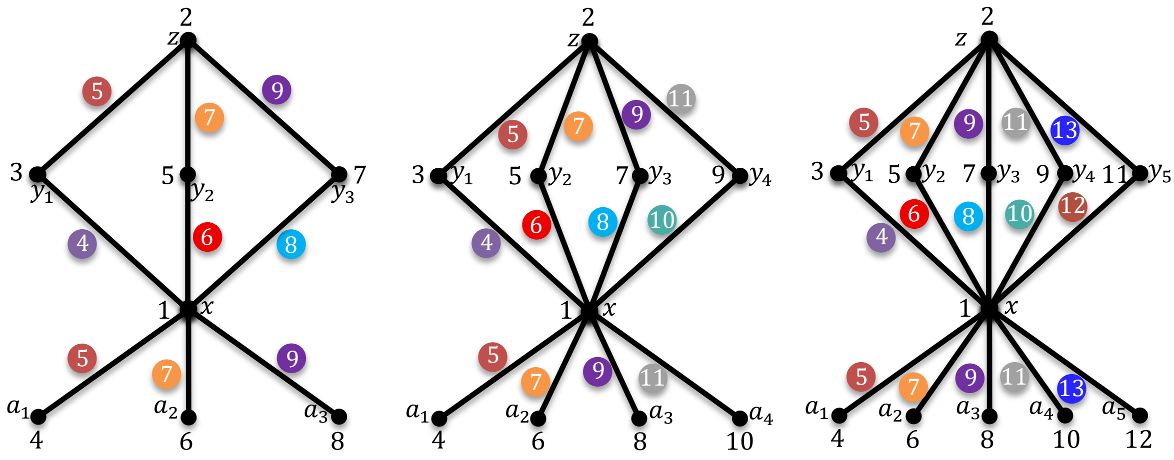
$$w(e) = \begin{cases} 2i + 3, & e = zy_i \\ 2i + 2, & e = xy_i \\ 2i + 3, & e = xa_i \end{cases}$$

Untuk $n = 3$ *Jellyfish Graph* (Jf_n) memiliki jumlah warna minimal yaitu 6. Selanjutnya untuk $n = 4$, maka jumlah warna minimalnya yaitu 7. Selain itu, untuk $n = 5$, maka jumlah warna minimalnya yaitu 8. Dengan demikian,

Volume 9, Nomor 2, Agustus-Desember 2025 **CERMIN : JURNAL PENELITIAN**
P-ISSN 2580 – 7781
E-ISSN 2615 – 3238

banyaknya warna minimal yang diaplikasikan pada *Jellyfish Graph* ($\mathrm{Jf_n}$) adalah sebanyak $n + 3$.

Dapat disimpulkan bahwa *Jellyfish Graph* ($\mathrm{Jf_n}$) dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$, maka bilangan kromatik untuk pewarnaan lokal sisinya yaitu $x_{lea}(\mathrm{Jf}_n) = n + 3$. Ilustrasi mengenai hasil pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Jellyfish Graph* ($\mathrm{Jf_n}$) sebagai berikut:



(a) **(b)** **(c)**

Gambar 6. (a) Pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Jellyfish Graph* ($\mathrm{Jf_3}$),
(b) Pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Jellyfish Graph* ($\mathrm{Jf_4}$),
(c) Pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Jellyfish Graph* ($\mathrm{Jf_5}$)

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan yaitu *Crab Graph* ($\mathrm{Cr_n}$) dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$, ini memiliki kardinalitas yaitu $|V| = 2n + 4$ dan $|E| = 2n + 5$ serta mempunyai bilangan kromatik untuk pewarnaan lokal sisinya yaitu $x_{lea}(Cr_n) = n + 3$. *Squid Graph* ($\mathrm{Sq_n}$) dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$, ini memiliki kardinalitas yaitu $|V| = n + 3$ dan $|E| = n + 3$ serta mempunyai bilangan kromatik untuk pewarnaan lokal sisinya yaitu $x_{lea}(Sq_n) = n + 2$. *Jellyfish Graph* ($\mathrm{Jf_n}$) dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$, ini memiliki kardinalitas yaitu $|V| = 2n + 2$ dan $|E| = 3n$ serta mempunyai bilangan kromatik untuk pewarnaan lokal sisinya yaitu yaitu $x_{lea}(\mathrm{Jf}_n) = n + 3$.

P-ISSN 2580 – 7781
E-ISSN 2615 – 3238

DAFTAR PUSTAKA

AH, N. I. (2011). Analisis Tentang Graf Perfect. *Jurnal Gagasan Matematika dan Informatika*.

Arumugam, S. K., Premalatha, M., Baca, M., & Semanicova-Fenovcikova, A. (2017). Local Antimagic Vertex Coloring of a Graph. *Graphs and Combinatorics*, 275-285.

Fatihah, N. N. (2017). *Analisis Pewarnaan Titik dan Sisi r-Dinamis Pada Graf Hasil Operasi Comb Sisi Cn]H.* Skripsi.

Munir, R. (2016). *Matematika Diskrit.* Bandung: Informatika Bandung.

Nurhidayah, F., & Susanti, Y. (2022). Pelabelan k−Prima Pada Beberapa Kelas Graf Gabungan Lintasan. *Jurnal Matematika Thales*.

Parkhurst, H. (2014). Pelabelan Total (a, d) - Sisi Anti Ajaib Super Pada Gabungan Graf Lengkap mKn. *Jurnal Matematika UNAND*, 24-27.

Rahman, A., Narwen, & Baqi, A. I. (2019). Pelabelan Total (a, d)-Sisi Antiajaib Pada Graf Petersen P(n,2), Untuk n Ganjil, n ≥ 3. *Jurnal Matematika UNAND*, 1-4.

Rezekina, L. (2016). Pelabelan Total (a,d)-C3-Antiajaib Super Pada Graf Ular Sn. *Skripsi*.

Rohmatillah, N. (2018). *Pewarnaan Lokal Sisi Antimagic Pada Keluarga Graf Pohon dan Graf Hasil Operasi Shackle.* Jember: Universitas Jember.

Wilson, R. J. (2015). *Pengantar Teori Graf.* Jakarta: Erlangga.